1　授業で紹介した公式・定理の証明

今回授業で取り上げた公式や定理で，証明を省略したものについて，ここで証明を述べておく。このような証明が自分でできるようにまでなる必要はないが，漠然と証明の雰囲気と，「微分積分って案外論理的にできてるんだなあ」という感触を味わってもらえれば幸いである（微分積分の楽しみの１つは「証明する楽しみ」なのだから）。

一応ここで，それらの公式・定理をもう一度掲げてから証明をする。

♦ 公式

関数 $f(x)\,, g(x)$ が，$x \to a$ の極限でそれぞれ $\alpha\,, \beta$ に収束するとする：

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = \beta. \tag{2}$$

このとき，次が成り立つ[a]：

$$\begin{aligned}\text{(i)}\ \lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} &= \alpha \pm \beta \quad \text{（複号同順）}, \\ \text{(ii)}\ \lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} &= \alpha\beta.\end{aligned}$$

[a]**複号**とは，記号 ± のこと。**複号同順**というのは，等式の中の ± を全部 + で置き換えた式と，全部 − で置き換えた式がそれぞれ別個に成立するという意味である。

♦(i) の証明

複号 ± の + の方について証明する（− についても証明は全く同様）。さて極限について云々する場合，まずは「目標値との差」をとるのが基本である。(i) の場合は，$f(x) + g(x)$ から $\alpha + \beta$ を引き算し，

$$\begin{aligned}\{\alpha+\beta\} - \{f(x)+g(x)\} &= \underbrace{\{\alpha - f(x)\}}_{\epsilon\text{とおく}} + \underbrace{\{\beta - g(x)\}}_{\delta\text{とおく}} \\ &= \epsilon + \delta \end{aligned} \tag{3}$$

とする[1]。

仮定 (1), (2) より，$\epsilon = \alpha - f(x)$ と $\delta = \beta - g(x)$ は x を a に近付ければ好きなだけ（絶対値を）小さくすることができる。よって，その好きなだけ小さくできるもの同士を足し合わせた (3) 右辺もまた好きなだけ小さくできる。故に $f(x)+g(x)$ は $x \to \alpha$ で $\alpha + \beta$ に収束する。これで (i) が示せた。■

♦(ii) の証明

[1]ϵ はギリシャ文字の「イプシロン」，δ は「デルタ」。どちらも「非常に小さい量」や「(何らかの極限で) 0 に収束する量」を表すことが多いので，そのつもりで式を眺めると分かりやすい。

まずはセオリー通り,「目標値との差」を考える：

$$\alpha\beta - f(x)g(x). \tag{4}$$

ここで，α や β を先ほどの記号で表しておこう。ϵ, δ の定義より，

$$\begin{aligned} \alpha &= f(x) + \epsilon, && (5) \\ \beta &= g(x) + \delta && (6) \end{aligned}$$

である。これらを (4) に代入すると，

$$\begin{aligned} \alpha\beta - f(x)g(x) &= \{f(x) + \epsilon\}\{g(x) + \delta\} - f(x)g(x) \\ &= f(x)\delta + g(x)\epsilon + \epsilon\delta && (7) \end{aligned}$$

となる。

実は，(7) 右辺の 3 つの項は全て，x を a に近付ければ好きなだけ小さくできる。例えば第一項 $f(x)\delta$ について考えよう。δ が 0 に近づいていくのは分かり切っているので，問題は $f(x)$ の挙動である。f は $x \to a$ で α に収束するので，$f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ は $x = a$ の近辺で無制限に大きくはならない。言いかえれば，x を a に十分近付ければ，$|f(x)|$ をある定数 M より小さくできる（下図参照)。

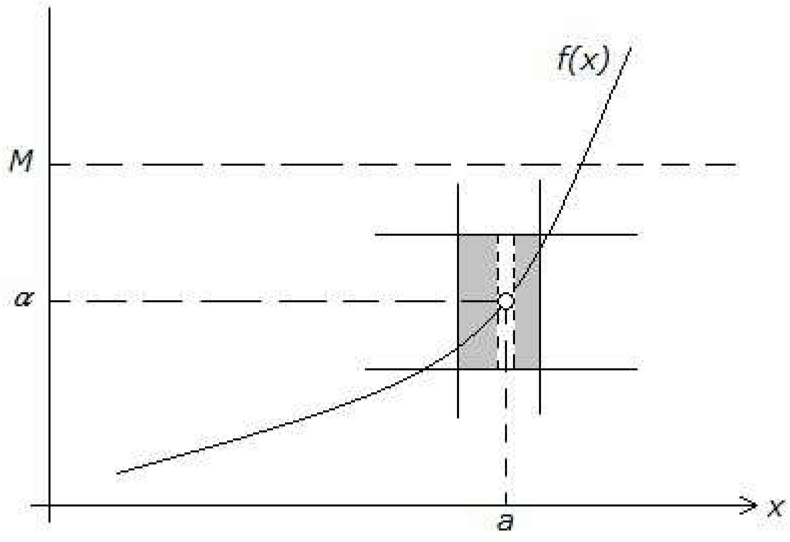

Figure 1: $\alpha > 0$ の場合で説明する。まず，α より大きな定数 M をテキトーにとる。そして α を中に含み，かつ M を含まないようなタテ幅をこれまたテキトーにとってくると，収束の定義より，点 a を含むあるヨコ幅の中（ただし a 自身は除く。図のグレーの部分）で $f(x)$ は必ずタテ幅の中に入っているから，その範囲で常に $|f(x)| < M$ が成り立つ。$\alpha < 0$ の場合も同様である。

従って

$$|f(x)\delta| = |f(x)| \cdot |\delta| < M \cdot |\delta|$$

だから，x を a に近付ければ，$f(x)\delta$ の絶対値は好きなだけ小さくできる（要するに，$|f(x)|$ がある一定値を超えない以上，$f(x)$ は定数扱いできるというわけだ）。もちろん第二項 $g(x)\epsilon$ についても同様である。

最後に第三項 $\epsilon\delta$ だが，これは「好きなだけ小さくできる量」同士の掛け算だから論はないだろう。これで結局，(7) 右辺の各項が，従って右辺全体が，x を a に近付ければ好きなだけ小さくできるということが示された。言いかえれば，$x \to \alpha$ で $f(x)g(x)$ は $\alpha\beta$ に収束する。これで (ii) が示せた。■

今度は，次の定理を証明しよう。

♦ 定理

関数 f, g について常に $f(x) > g(x)$ [または $f(x) \geqq g(x)$] が成り立ち，かつ $x \to a$ で $f(x)$, $g(x)$ が極限値をもつならば，

$$\lim_{x\to a} f(x) \geqq \lim_{x\to a} g(x). \tag{8}$$

証明に入る前に，式 (8) をちょっといじってみよう。この式は，

$$\lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) \geqq 0 \tag{9}$$

と同値である。ここで先ほどの公式 (i) を使えば，式 (9) はさらに

$$\lim_{x\to a}\{f(x) - g(x)\} \geqq 0$$

とも同値であることが分かる。

一方，前提条件 $f(x) > g(x)$ [または $f(x) \geqq g(x)$] の方も移項すれば $f(x) - g(x) > 0$ [または $f(x) - g(x) \geqq 0$] と同じだから，結局（$h(x) = f(x) - g(x)$ のつもりで）次の定理を証明すればよいことが分かった。

♦ 定理

関数 h について常に $h(x) > 0$ [または $h(x) \geqq 0$] が成り立ち，かつ $x \to a$ で $h(x)$ が極限値をもつならば，

$$\lim_{x\to a} h(x) \geqq 0.$$

♦ 定理の証明

背理法を使って示す。すなわち

$$\alpha = \lim_{x\to a} h(x)$$

とし，仮に $\alpha < 0$ であったらどうなるかを考える。

下図のように，もし $\alpha < 0$ であるならば，$x = a$ に十分近いところで $h(x) < 0$ となるはずである。

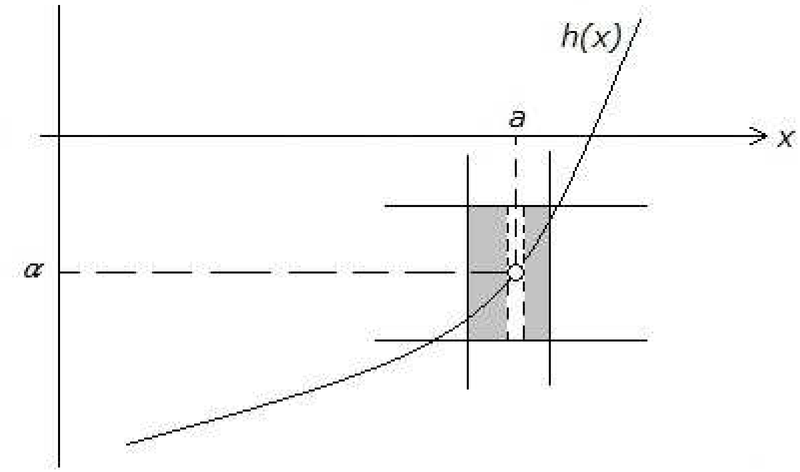

Figure 2: 先ほどのように，α を中に含み，かつ 0 を含まない（全体が x 軸より下に来る）タテ幅をテキトーにとる。すると収束の定義より，a を含むあるヨコ幅の中（で a 以外の部分）において $h(x)$ は常にタテ幅の中に入っている——すなわち $h(x) < 0$ となっている——はずである。

ところがこれは，常に $h(x) > 0$ [または $h(x) \geqq 0$] が成り立つという前提に反する。従って背理法の仮定 $\alpha < 0$ は誤りであり，$\alpha \geqq 0$ でなくてはならない。これで定理は示された。■

練習問題：次の極限値を求めよ[2]（a は定数)。

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}. \tag{10}$$

解

式 (10) で，lim 記号の中の関数は，$h \neq 0$ でのみ定義される関数である。従って，単に h に 0 を代入したのではうまくいかないことに注意しよう。しかし $h \to 0$ の極限において，関数の $h = 0$ での値が定義されているかどうかは問題にならない。これは関数の極限の授業で説明した通りである。$h \to 0$ での極限値は，$h \neq 0$ での関数値のみで決まるのである。

よって $h \neq 0$ とし，lim 記号の中の関数を通常通り変形すると，

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

となる。従って，式 (10) は

$$\lim_{h \to 0} (2a + h) \tag{11}$$

[2]このような計算は，後に微分係数（導関数）を定義から求める際に必須となる。

と変形できる。ここで今回の公式を使えば，(11) はさらに

$$\lim_{h \to 0}(2a + h) = \lim_{h \to 0}(2a) + \lim_{h \to 0} h = 2a$$

となる。よって答えは $2a$.（終わり）